

# Diploid-probabilistische, elementare Zellularautomaten

Christoph Stelz

4. August 2020

## 1 Einleitung

Elementare Zellularautomaten (ECA) sind seit Jahrzehnten Gegenstand der Forschung, weil sie trotz ihrer simplen Beschaffenheit komplexe Muster erzeugen können. Dies macht sie zu perfekten Simulationssubjekten. Während es nur 88 verschiedene deterministische ECA gibt, lassen sich durch Einführung des Zufalls in den Entwicklungsprozess unendlich viele *probabilistische ECA* erzeugen.

In dieser Arbeit werden wir uns mit der zufälligen Mischung zweier ECA beschäftigen, basierend auf [1]; wir verzichten auf weitere Quellenverweise darauf. Ferner werden wir die Auswirkungen des Mischungsverhältnisses zweier ECA auf das Verhalten quantifizieren, indem Maßzahlen wie Zelldichte nach einer vorgegebenen Evolutionsdauer für verschiedene Mischungen bestimmt werden. Schließlich wird die Anzahl der Äquivalenzklassen von deterministischen ECA unter bestimmten Symmetrien untersucht.

## 2 Theoretische Hintergründe

### 2.1 Elementare Zellularautomaten

ECA sind in diesem Rahmen folgendermaßen definiert:

- die Zustandsmenge enthält zwei Zustände:  $Q = \{0, 1\}$
- die Zellen sind auf einem Restklassen-Ring  $\mathcal{L} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  platziert (periodische Randbedingung)
- die lokale Zustandsüberföhrungsfunktion geht von einer Nachbarschaft mit Radius 1 aus:  $f : Q^3 \rightarrow Q$

### 2.2 Probabilistische ECA

Während ECA wie in Abschnitt 2.1 definiert vollständig deterministisch sind, also keine Wahlmöglichkeiten offen lassen, ist bei *probabilistischen ECA* die lokale Übergangsfunktion definiert als  $\phi : Q^3 \rightarrow [0, 1]$ . Der Funktionswert ist also eine

Wahrscheinlichkeit zwischen 0 und 1, dass eine Zelle bei gegebener Nachbarschaft den Zustand 1 annimmt.

Somit kann die Konfiguration auch als Wahrscheinlichkeitsverteilung  $\xi^t$  aufgefasst werden, wobei  $t$  den betrachteten Zeitpunkt festhält.  $\xi_i^t$  sei dabei eine Zufallsvariable, die angibt in welchem Zustand Zelle  $i$  sich zum Zeitpunkt  $t$  befindet.

Probabilistische ECA sind durch Definition der Wahrscheinlichkeit der Zufallsvariablen  $\xi^{t+1}$  in Abhängigkeit der vorausgegangenen Konfiguration  $\xi^t$  definiert:

$$\Pr\{\xi_i^{t+1} = 1\} = \sum_{(x,y,z) \in Q^3} \Pr\{(\xi_{i-1}^t, \xi_i^t, \xi_{i+1}^t) = (x, y, z)\} \cdot \phi(x, y, z) \quad (1)$$

Hierbei wird für jede mögliche Nachbarschaft die Wahrscheinlichkeit, dass die Zelle im nächsten Zeitschritt den Zustand 1 annimmt (also genau der Funktionswert der Übergangsfunktion  $\phi$ ) multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, dass diese Nachbarschaft tatsächlich vorliegt unter Betrachtung der zum aktuellen Zeitschritt gegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung  $\xi^t$ .

Weil die Wahrscheinlichkeitsverteilung zum Folgezeitpunkt nur von der Kenntnis vorhergegangenen Verteilung abhängt, spricht man auch von einer Markow-Kette erster Ordnung:  $\xi^t$  reicht aus, um  $\xi^{t+1}$  zu berechnen. Diese Eigenschaft wird in der alternativen Definition (2) noch expliziter. Hier wird nämlich nicht der lokale Übergang einer einzelnen Zelle beschrieben, sondern die Wahrscheinlichkeit, für  $x, y \in Q^n$  von der Konfiguration  $x$  in die Konfiguration  $y$  überzugehen:

$$\Pr\{\xi^{t+1} = y \mid \xi^t = x\} = \prod_{i \in \mathcal{L}} (y_i \cdot \phi(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) + (1 - y_i) \cdot (1 - \phi(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}))) \quad (2)$$

Durch die Multiplikation kann für jeden Index  $i \in \mathcal{L}$  der Faktor als eigenständiges Ereignis (nämlich dass  $\xi_i^{t+1} = y_i$ ) betrachtet werden, die alle verkettet den Gesamtübergang zur Folge haben. Jeder Faktor ist aus zwei Summanden zusammengesetzt, und da  $y_i \in Q = \{0, 1\}$  ist, ist stets einer der Summanden 0. Im Fall dass  $y_i = 1$ , dass also die Zelle im nächsten Zeitschritt den Zustand 1 annehmen soll, kann einfach die Übergangsfunktion  $\phi$  für die durch  $\xi^t$  gegebene Nachbarschaft als Wahrscheinlichkeit genommen werden, da dies der Definition von  $\phi$  entspricht. Ist jedoch  $y_i = 0$ , soll also die Zelle im nächsten Zeitschritt den Zustand 0 annehmen, wird der erste Summand zur Null. Der zweite beschreibt dann genau die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses des vorherigen Falls, somit wird der Funktionswert der Übergangsfunktion für die gegebene Nachbarschaft von 1 subtrahiert.

## 2.3 Diploide ECA

Bei *diploiden ECA* handelt es sich nun um eine spezielle Art der stochastischen ECA. Die Übergangsfunktion  $\phi$ , die normalerweise durch Acht reelle Zahlen zwischen 0

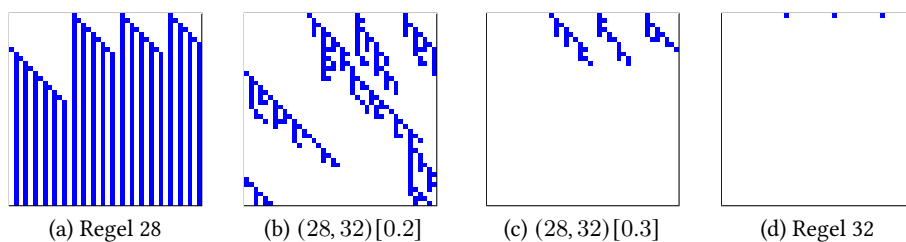


Abbildung 1: Zwei elementare Regeln sowie ihre diploide Mischung

und 1 (eine für jede der  $2^3$  möglichen Nachbarschaften) beschrieben wird, kann für eine gegebene Nachbarschaft  $x, y, z \in Q$  bei diploiden ECA nur folgenden Funktionswert haben:

$$\phi(x, y, z) = (1 - \lambda) \cdot f_1(x, y, z) + \lambda \cdot f_2(x, y, z) \quad (3)$$

$f_1$  und  $f_2$  sind dabei die Übergangsfunktionen zweier deterministischer ECA,  $\lambda \in [0, 1]$  beschreibt das „Mischungsverhältnis“ der ECA.

Folgende Feststellung lassen sich anhand Gleichung 3 treffen: falls  $\lambda \in \{0, 1\}$ , erhält man wieder einen deterministischen ECA, da die Funktionswerte der Übergangsfunktion dann in  $Q$  liegen. Gleiches gilt für den Fall, dass  $f_1 = f_2$ .

Deshalb gilt ferner die Forderung für nicht-triviale diploide ECA, dass ein  $\lambda \in (0, 1)$  und eine Nachbarschaft  $x, y, z \in Q$  existieren müssen, für die  $\phi(x, y, z) = \lambda$ . Somit ist garantiert, dass mindestens einer der Funktionswerte nicht aus der Zustandsmenge kommt, sondern eine Wahrscheinlichkeit darstellt. Andernfalls handelt es sich ja wieder um einen „einfachen“ deterministischen ECA.

Abbildung 1 zeigt das Verhalten zweier elementarer Regeln (28 und 32), und wie sich die Mischung derselben verhält. Es lässt sich bereits eine massive Veränderung der Regelmäßigkeit erkennen. In Abschnitt 4.1 werden diese Veränderungen genauer spezifiziert.

Wenn  $f_1$  und  $f_2$  Übergangsfunktionen deterministischer ECA sind, und  $\lambda \in (0, 1)$ , dann wird der zugehörige diploide ECA mit  $(f_1, f_2)[\lambda]$  notiert. Ein Beispiel hierfür findet man in der Beschriftung der Abbildungen 1b und 1c.

### 3 Äquivalenzen unter ECA

In diesem Abschnitt werden mehrere Äquivalenzen von ECA definiert. Ferner wird gezeigt, dass es unter diesen Äquivalenzen 88 Äquivalenzklassen von ECA gibt. Schließlich wird ausgehend davon auf die Anzahl von diploiden ECA geschlossen.

**Austauschsymmetrie** Bei Gleichung 3 fällt auf, dass  $(f_1, f_2)[\lambda]$  und  $(f_2, f_1)[1 - \lambda]$  genau die gleichen Funktionswerte liefern:

$$\begin{aligned}
& (1 - \lambda) \cdot f_1(x, y, z) + \lambda \cdot f_2(x, y, z) \\
&= \lambda \cdot f_2(x, y, z) + (1 - \lambda) \cdot f_1(x, y, z) \\
&= (1 - (1 - \lambda)) \cdot f_2(x, y, z) + (1 - \lambda) \cdot f_1(x, y, z)
\end{aligned} \tag{4}$$

Es lassen sich also alle diploiden ECA auch mit der zusätzlichen Einschränkung  $\lambda \in (0, \frac{1}{2}]$  beschreiben.

x	y	z	$f(x, y, z)$	x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1	0	<b>1</b>
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	<b>1</b>	1	0	0	0
0	1	1	<b>1</b>	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0	1	<b>1</b>
0	0	0	0	0	0	0	0

(a) Regel 28
(b) Regel 70

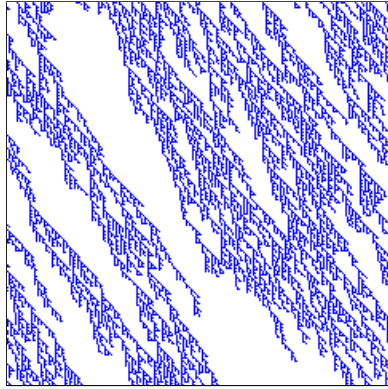
Tabelle 1: Funktionswerte der Übergangsfunktionen 28 und 70

**Reflektionssymmetrie** In Abbildung 2 sind zwei Verläufe von ECA abgebildet, deren Regeln sich deutlich zu unterscheiden scheinen: Nummer 28 und 70. Betrachtet man die Bilder, dann scheinen sie genau spiegelverkehrt zu sein. Dieses Phänomen kann durch Betrachtung der Übergangsfunktionen erklärt werden. In Tabelle 1 sind die Funktionswerte tabellarisch dargestellt; auffallend ist, dass genau die Werte von  $f(1, 0, 0)$  mit  $f(0, 0, 1)$  und  $f(0, 1, 1)$  und  $f(1, 1, 0)$  vertauscht sind. Das heißt, im Allgemeinen gilt  $f_{28}(x, y, z) = f_{70}(z, y, x)$ . Dies wird als Reflektionssymmetrie bezeichnet, und für eine gegebene Übergangsfunktion  $f$  ist sie als  $R(f)(x, y, z) := f(z, y, x)$  definiert.

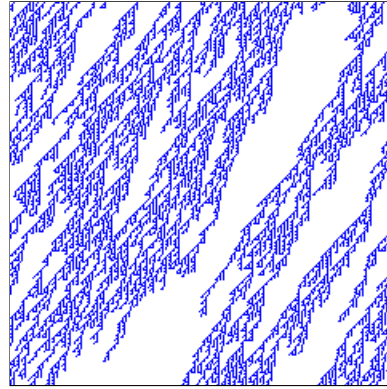
**Konjugationssymmetrie** Abbildung 3 lässt eine weitere Symmetrie von deterministischen ECA erkennen: gelegentlich ist das Verhalten das genaue „Negativ“, d. h. die Zustände sind konjugiert. Der ECA in 3a wird als äquivalent zu 3b betrachtet, da letzterer durch einfaches Umkehren der Zustände des ersteren erhalten werden kann.

Für eine deterministische ECA-Übergangsfunktion  $f : Q^3 \rightarrow Q$  ist die Konjugationssymmetrie definiert als  $C(f)(x, y, z) = 1 - f(1 - x, 1 - y, 1 - z)$

**Kompositionssymmetrie** Zuletzt bleibt die Kompositionssymmetrie, die lediglich die Verknüpfung aus Reflektion und Konjugation darstellt:

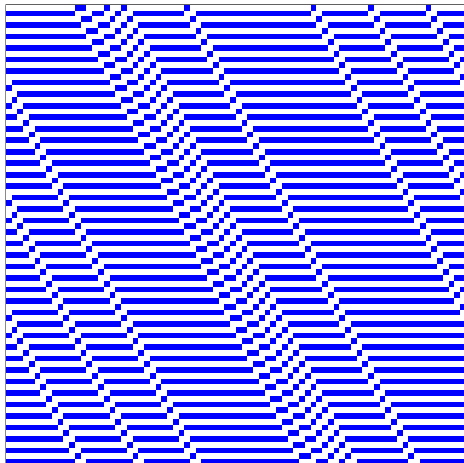


(a) (28, 32)[0.2]

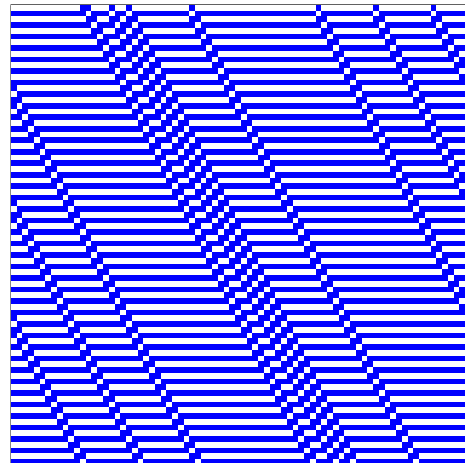


(b) (70, 32)[0.2]

Abbildung 2: Zwei diploide ECA auf 240 Zellen über 240 Zeitschritte simuliert <sup>1</sup>



(a) (35, 32)[0.0]



(b) (59, 32)[0.0]

Abbildung 3: Deterministische ECA für 64 Zeitschritte auf 64 Zellen simuliert

$$T(f)(x, y, z) = (R \circ C)(f) = (C \circ R)(f) = 1 - f(1 - z, 1 - y, 1 - x)$$

### 3.1 Anzahl invarianter ECA

x	y	z	Bit	Both	Reflection	Conjugation	T
1	1	1	$b_7$	f.w.	f.w.	f.w.	f.w.
1	1	0	$b_6$	f.w.	f.w.	f.w.	f.w.
1	0	1	$b_5$	f.w.	f.w.	f.w.	f.w.
1	0	0	$b_4$	-	f.w.	f.w.	f.w.
0	1	1	$b_3$	-	-	-	-
0	1	0	$b_2$	-	f.w.	-	-
0	0	1	$b_1$	-	-	-	-
0	0	0	$b_0$	-	f.w.	-	-

Tabelle 2: Übergangsfunktion als Bitfeld (f.w. = frei wählbar, - = bestimmt)

Nun stellt sich die Frage, wie viele nicht-äquivalente, diploide ECA es dann überhaupt gibt.

Sei dazu  $\mathcal{B}$  die Menge aller ECA, die invariant unter den Symmetrien  $R$ ,  $C$  und  $T$  sind, ferner seien  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{T}$  Mengen von ECA die ausschließlich invariant unter jeweils  $R$ ,  $C$  und  $T$  sind.

Für die Anzahl der Elemente in  $\mathcal{B}$  lässt sich folgende Überlegung anstellen: wählt man den Funktionswert  $(1, 1, 1)$  frei, dann ist dadurch  $(0, 0, 0)$  bestimmt, damit die Übergangsfunktion invariant unter der Konjugation bleibt. In ähnlicher Weise ist bei Wahl von  $(1, 1, 0)$  der Wert von  $(0, 1, 1)$  (Reflektion),  $(0, 0, 1)$  (Konjugation) und  $(1, 0, 0)$  (Reflektion und Konjugation) bestimmt.  $(1, 0, 1)$  bestimmt schließlich  $(0, 1, 0)$ . Die freie Wahl von drei Funktionswerten liefert also eine vollständig definierte Übergangsfunktion. Da für jeden der drei Funktionswerte entweder der Zustand 0 oder 1 gewählt werden kann, gibt es also  $2^3 = 8$  verschiedene Wahlmöglichkeiten. Es gilt also:  $|\mathcal{B}| = 8$ .

Ferner gibt es genau  $2^4$  ECA, die invariant unter der Konjugation sind, da jeweils die komplemente Nachbarschaft den komplementären Wert haben muss:  $b_0 = 1 - b_7, \dots, b_3 = 1 - b_4$ . Da  $|\mathcal{C}|$  nur die ECA zählt, die *ausschließlich* unter Konjugation invariant sind, aber alle ECA aus  $\mathcal{B}$  ebenfalls unter Konjugation invariant sind und somit ebenfalls in den zuvor berechneten  $2^4$  ECA vorkommen, muss diese Anzahl abgezogen werden. Man erhält also:

$$|\mathcal{C}| = 2^4 - |\mathcal{B}| = 8$$

Bei der Reflektionssymmetrie gibt es etwas mehr Spielraum: es ist lediglich gefordert, dass  $b_3 = b_6$  und  $b_1 = b_4$ . Somit verbleiben 6 frei wählbare Funktionswerte. Wie zuvor muss auch die Anzahl der ECA in  $\mathcal{B}$  abgezogen werden, um

nicht doppelt zu zählen.

$$|\mathcal{R}| = 2^6 - |\mathcal{B}| = 56$$

Die Kombination  $T$  von Reflektion und Konjugation hat 4 frei wählbare Funktionswerte, da die anderen durch die Konjugation bestimmt werden. Es wird gleichermaßen die Kardinalität von  $\mathcal{B}$  abgezogen, denn wenn ein ECA ausschließlich invariant unter Reflektion und Konjugation ist (also in  $\mathcal{B}$  liegt), dann ist er selbstverständlich auch invariant unter der Verkettung der beiden Operationen.

$$|\mathcal{T}| = 2^4 - |\mathcal{B}| = 8$$

Die verbleibenden ECA werden der Menge  $\mathcal{N}$  zugeordnet, die alle nicht-invarianten ECA umfasst. Ihre Kardinalität errechnet sich aus der Anzahl aller ECA abzüglich der zuvor erfassten invarianten ECA-Mengen:

$$|\mathcal{N}| = 2^8 - |\mathcal{B}| - |\mathcal{C}| - |\mathcal{R}| - |\mathcal{T}| = 176$$

### 3.1.1 Anzahl der Äquivalenzklassen invarianter ECA

Im Folgenden sind  $b, c, r, t, n$  die Anzahl der Äquivalenzklassen der zugehörigen Menge.

Betrachtet man die Menge  $\mathcal{B}$ , dann gibt es in ihr keine äquivalenten ECA, da die Anwendung der Symmetrien per Definition wieder den ursprünglichen ECA liefert, weil sie ja invariant unter  $R, C$  und somit auch  $T$  ist. Deshalb gilt  $b = |\mathcal{B}|$ .

Bei der Menge  $\mathcal{R}$  ist das anders: es gibt keine Äquivalenzen bezüglich der Reflektionssymmetrie, da die ECA darunter invariant sind, aber es gibt dennoch zu jedem ECA den konjugierten ECA. Dieser ist ebenfalls in der Menge enthalten, weil die Konjugation die Reflektionssymmetrie nicht beeinflusst. Wegen der Invarianz unter der Reflektionssymmetrie ist für die ECA aus  $\mathcal{R}$  die Kompositionssymmetrie gleichbedeutend mit der Konjugationssymmetrie und muss deshalb nicht weiter berücksichtigt werden. Somit ist die Anzahl der Äquivalenzklassen nur halb so groß wie die Kardinalität von  $\mathcal{R}$ :  $r = \frac{|\mathcal{R}|}{2}$ .

Analog gilt für  $\mathcal{C}$ , dass der „reflektierte Automat“ ebenfalls noch in der Menge enthalten ist:  $c = \frac{|\mathcal{C}|}{2}$ .

Für ECA aus  $\mathcal{T}$  gilt ja, dass sie invariant unter der Kompositionssymmetrie sind, aber nicht unter der Reflektionssymmetrie und nicht unter der Konjugationssymmetrie. Für ihre Übergangsfunktion  $f$  gilt also:  $T(f) = C(R(f)) = f$ . Für die Konjugation gilt aber auch  $C(C(f)) = f$ , da eine doppeltes Umkehren der Zustände wieder zur Identität zurückführt. Da nun also  $C(C(f)) = f = C(R(f))$  ist, und die Konjugation eine Umkehrfunktion hat (nämlich sich selbst), ist also für ECA aus  $\mathcal{T}$ :  $R(f) = C(f)$ . Somit ist die Anzahl der Äquivalenzklassen von  $\mathcal{T}$  nur halb so groß, da jeweils noch der reflektierte ECA (der dem konjugierten entspricht) ebenfalls in der Menge liegt:  $t = \frac{|\mathcal{T}|}{2}$ .

Bei der Menge  $\mathcal{N}$ , die ja unter keiner der Symmetrien invariant ist, gilt für eine beliebige Übergangsfunktion  $f$  dass  $f_r = R(f) \neq f$ ,  $f_c = C(f) \neq f$ ,  $f_t = T(f) \neq f$ . Außerdem sind  $f_r, f_c, f_t$  paarweise verschieden:

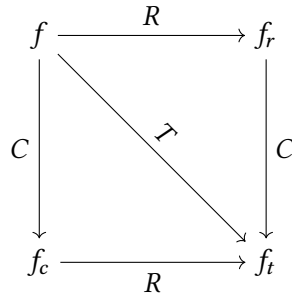


Abbildung 4: Situation in der Menge  $N$

1. Falls  $f_r = f_c$ , dann ist  $T(f) = C(R(f)) = C(f_r) = C(f_c) = f$ , und somit wäre  $f$  invariant unter der Kompositionssymmetrie.
2. Falls  $f_c = f_t$ , dann ist  $C(f) = f_c = f_t = T(f) = C(R(f))$ . Wenn aber  $C(f) = C(R(f))$ , dann ist  $f = R(f)$  und somit wäre  $f$  invariant unter der Reflektionssymmetrie.
3. Falls  $f_t = f_r$ , dann ist analog  $R(f) = f_r = f_t = R(C(f))$ , also  $f = C(f)$ ,  $f$  wäre dann invariant unter der Konjugationssymmetrie.

Wie Abbildung 4 nochmal verdeutlicht, haben wir also jeweils vier symmetrische Übergangsfunktionen in der Menge  $N$ , weshalb gilt:  $n = \frac{|N|}{4}$ .

**Ergebnis** Für die Anzahl der Äquivalenzklassen gilt  $b = 8$ ,  $c = 4$ ,  $r = 28$ ,  $t = 4$ ,  $n = 44$ . Das macht eine Summe von 88 nicht-äquivalenten ECA.

### 3.2 Äquivalente diploide ECA

In Fatès' Paper [1] wird dann ausgehend von den auf ECA definierten Äquivalenzen auf die Anzahl der Äquivalenzklassen von diploiden ECA geschlossen. Als Veranschaulichung wird dabei ein diploider ECA als auf einer Diagonale liegend bezeichnet, die in einem Hyperwürfel  $[0, 1]^8$  verläuft. Während ein Rechteck  $2^2$  Ecken und ein Würfel  $2^3$  Ecken hat, besitzt dieser acht-dimensionale Hyperwürfel  $2^8$  Ecken, also entspricht jede genau einem deterministischen ECA. In *Proposition 2* des besagten Papers werden dann die Äquivalenzklassen der Zwei-Tupel  $(f, g)$  von deterministischen ECA analysiert, um die Anzahl der Diagonalen bestimmen, die alle diploiden ECA erzeugen: insgesamt 8808 gibt es.

## 4 Eigenschaften diploider ECA

Stephen Wolfram hat 1984 vier verschiedene Klassen von ECA definiert [2], deren Verhalten sich ungefähr wie folgt charakterisieren läßt:

Klasse 1 geht in einen räumlich homogenen Zustand über.

Klasse 2 produziert eine Sequenz von stabilen oder periodischen Strukturen.



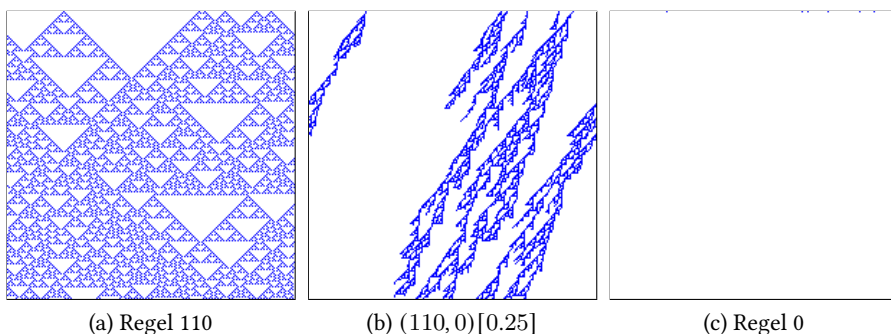


Abbildung 5: Die Diagonale (110,0)

Klasse 3 hat chaotisches, unregelmäßiges Verhalten.

Klasse 4 erzeugt komplizierte Strukturen, die sich z. T. im Raum ausbreiten.

Als Beispiel wollen wir hier Regel 110 betrachten, welche der Klasse 4 angehört, in Mischung mit Regel 0, die offensichtlich zur Klasse 1 gehört. Wie sich anhand Abbildung 5 erkennen läßt, verändert die Mischung unter anderem auch die Klasse: die komplizierte, expandierende Struktur des ECA 110 wird durch Mischung mit dem ECA 0 zu einer zum Nullzustand konvergierenden Struktur bei hinreichend großem  $\lambda$ .

#### 4.1 Dichte und Knickdichte

Um diese Art der Verhaltensänderungen zu quantifizieren, kann man die Maße der Dichte und Knickdichte (in [1] „kink density“) benutzen. Die Dichte zu einer bestimmten Konfiguration  $x \in Q^{\mathcal{L}}$  ist definiert als der Anteil an Zellen, die den Zustand 1 haben:  $d(x) = |x|_1/n$ , wobei  $|x|_1 = |\{i \in \mathcal{L} \mid x_i = 1\}|$  und  $n = |\mathcal{L}|$ . Die Knickdichte wiederum beschreibt den Anteil an Zellen, die einen anderen Zustand annehmen als ihre Nachbarzelle (aus einer beliebigen Richtung her gelesen):  $d_k(x) = (|x|_{10} + |x|_{01})/n$ . Es gilt  $|x|_{10} = |\{i \in \mathcal{L} : x_i = 1 \wedge x_{i+1} = 0\}|$ ,  $|x|_{01}$  ist analog definiert.

Im folgenden wird der gleiche Versuchsaufbau wie in [1] verwendet: eine gegebene Diagonale von ECA wird auf 100 000 Zellen für 5 000 Zeitschritte simuliert für variierende  $\lambda$ : in  $[0, 0.05]$  und  $[0.95, 1]$  wird  $\lambda$  in 0.01 Schritten erhöht, in  $(0.05, 0.95)$  in 0.05 Schritten. Danach wird die Dichte und Knickdichte im letzten Zustand gemessen.

#### 4.2 Phasenübergänge 2. Ordnung

Betrachten wir erneut die Diagonale (110,0). Abbildung 6 zeigt die Dichte des diploiden ECA  $(110,0)[\lambda]$  für verschiedene  $\lambda$ . Wie zu erwarten ist die Dichte für  $\lambda = 0$ , also für den deterministischen ECA mit Regel 110 größer als Null, da der ECA zur Klasse 4 gehört und sich ausbreitende Strukturen aufweist. Bei

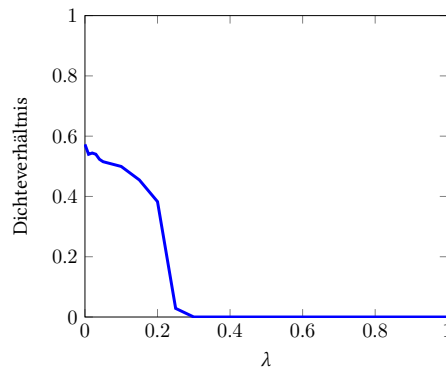


Abbildung 6: Dichte über verschiedene  $\lambda$  auf der Diagonalen (110,0)

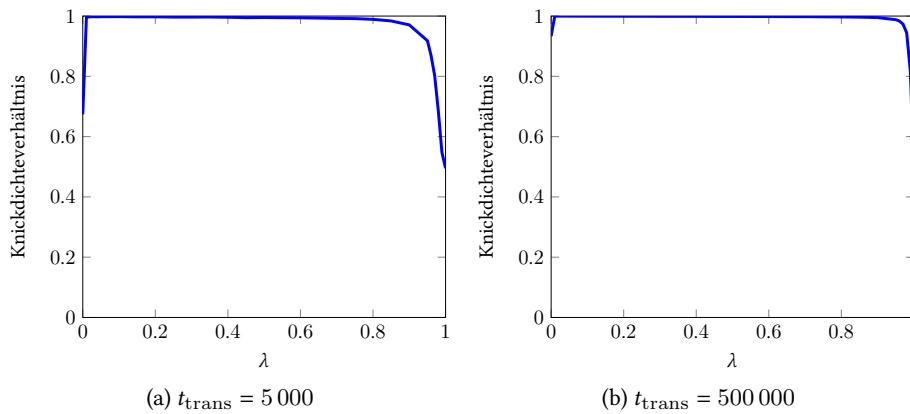


Abbildung 7: Knickdichte über verschiedene  $\lambda$  auf der Diagonalen (57, 51)

Mischung mit der Nullregel nimmt die Dichte jedoch zunehmend ab, da mit der Wahrscheinlichkeit  $\lambda$  Zellen unabhängig von ihrer Nachbarschaft den Zustand 0 annehmen. Von  $\lambda = 0.25$  auf  $\lambda = 0.3$  passiert dann ein sogenannter Phasensprung: die Dichte nimmt den Wert 0 an, der diploide Automat ist nicht mehr in Klasse 4 sondern in Klasse 1 – er nimmt nach ausreichend vielen Schritten (hier  $t_{\text{trans}} = 5000$ ) die Nullkonfiguration an.

### 4.3 Weitere Beispiele

Bei Mischung der Inversionsregel 51 mit 57 tritt bei der Knickdichte das in Abbildung 7a dargestellte Verhalten auf: die Knickdichte scheint für beliebige  $\lambda$  konstant 1 zu sein, bis sie ab einem kritischen  $\lambda_c$  einbricht. Eine mögliche Erklärung findet sich in Betrachtung der Regel 57 in Abbildung 8: dieser ECA hat bereits die Tendenz, eine hohe Knickdichte zu erzeugen. Wenn jedoch ab dem kritischen  $\lambda_c$  die Inversionsregel sehr häufig angewandt wird, dann wird die Knickdichte der Anfangskonfiguration präserviert, da man alle zwei Zeitschritte die nur wenig

abgeänderte Konfiguration erhält.

Dieser Verdacht erhärtet sich, wenn man nicht die Knickdichte nach  $t_{\text{trans}} = 5\,000$  Zeitschritten betrachtet, sondern nach  $500\,000$  wie in Abbildung 7b: Der kritische Schwellenwert  $\lambda_c$  ist größer als in 7a, da die geringe Wahrscheinlichkeit, dass Regel 57 Anwendung findet, durch die lange Zeitdauer kompensiert wird.

## 5 Implementierung

Version	$1 \times \lambda$	$28 \times \lambda$ (Diagonale)
Python 3.83	33s	16min 20s
C (1 Thread)	0.72s	20.95s
C (8 Threads)	0.80s	<b>3.95s</b>

Tabelle 3: Benchmark der verschiedenen Implementierungen<sup>2</sup>

Insgesamt sind im Rahmen dieser Seminararbeit drei Implementierungen zur Simulation von diploiden ECA entstanden. Bei der ersten handelt es sich um eine interaktive JavaScript-Webapp<sup>3</sup>, mit der sich die Regeln einfach visualisieren lassen. Die zweite Implementierung in Python ist zur Bestimmung der Dichte und Knickdichte nach  $5\,000$  Zeitschritten gedacht wie oben beschrieben. Die Performance war jedoch mehr als enttäuschend: zur Berechnung der Dichtewerte aller  $28$  verschiedenen  $\lambda$ -Werte einer Diagonale benötigt die unoptimierte Version über  $15\text{min}$ .

Um die Generierung der Dichtewerte der Diagonalen zu beschleunigen, entstand dann eine weitere Implementierung in C, in der Hoffnung mit der Optimierung des Compilers Zeit einzusparen. Dieser Effekt trat tatsächlich auch ohne jegliche Optimierung des Source-Codes selbst ein: wie in Tabelle 3 abgelesen werden kann, braucht die C-Version für die gleiche Ausgabe der Dichte der  $28$   $\lambda$ -Werte gerade mal etwas mehr als  $20\text{s}$ .

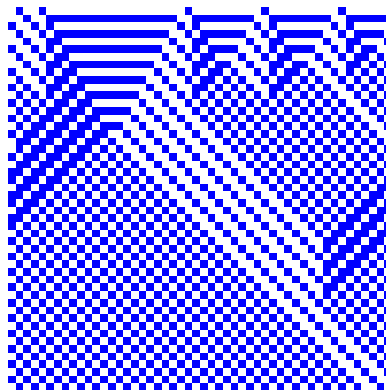


Abbildung 8: Regel 57

Da die CPU-Last in der ursprünglichen Version nur auf einen Kern konzentriert war, wurden dann weitere Anstrengungen unternommen, multithreading einzusetzen. Die Berechnung der Dichte einzelner diploider ECA kann für ein bestimmtes  $\lambda$  unabhängig erfolgen, weshalb die Schleife über verschiedene  $\lambda$  mittels OpenMP<sup>4</sup> parallelisiert wurde. In der ersten Version war die Leistung mit 8 Threads der Single-Thread-Variante jedoch unterlegen: da die Funktion `rand` zur Generierung von Zufallszahlen nicht thread-sicher ist, wurde sie in der Multithread-Version durch `rand_r` ersetzt, die den Seed des Generators in einer der Funktion übergebenen Variablen speichert. Hierfür wurde unvorsichtigerweise ein globales Array eingesetzt – da aber jeder Thread für jede Zelle eine Zufallszahl generiert und den Zustand dann in die seed-Variable sichert, kam es zu Cache-Konflikten zwischen den Kernen, die die Laufzeit immens verlängerten. Nachdem die Seedvariable privat für jeden Thread im Callstack abgelegt wurde, war dieses Problem jedoch gelöst und die Laufzeit mit 8 Threads auf nur noch 3.95s pro Diagonale reduziert. Der Code befindet sich öffentlich einsehbar in einem GitHub-Repository<sup>5</sup>: Die Python-Version hat den Dateinamen *density\_calc.py*, die C-Version in *parallel\_density\_calculator.c*.

## 6 Fazit

Es wurde gezeigt, dass die diploide Mischung von zwei ECA drastische Auswirkungen auf das Verhalten haben kann und neue Muster an den Tag legt. Mittels der Web-Applikation wurde ein zugänglicher Ausgangspunkt zur Simulation von diploiden ECA geschaffen und mittels der C-basierten Anwendung zur Dichtebestimmung eine effiziente Methode zur Identifizierung interessanter und nicht-trivialer Diagonalen. Ferner wurde im Detail nachvollzogen, warum die 256 verschiedenen Übergangsfunktionen der ECA auf 88 Äquivalenzklassen reduziert werden können. Beispielhaft wurde anhand der Diagonalen (57, 51) dargestellt, welcher Zusammenhang zwischen dem Mischverhältnis  $\lambda$  und der Simulationsdauer  $t_{\text{trans}}$  besteht.

Das Feld der diploiden Zellularautomaten lässt weiterhin viel Spielraum für neue Entdeckungen, gerade im Bereich der Simulation und Klassifizierung der Diagonalen und Diploiden.

## Anmerkungen

<sup>1</sup>Bei der Generierung wurde der Zufallsgenerator mit einem konstanten Seed initialisiert und bei dem zweiten Bild die Berechnungsrichtung des nächsten Zustands umgekehrt (rechts nach links), um stets die gleichen Pseudo-Zufallszahlen zu erhalten

<sup>2</sup>CPU AMD FX-8350 unter Linux 5.7.9

<sup>3</sup><https://ch-st.de/diploide-zellulaerautomaten/#app>

<sup>4</sup><https://www.openmp.org/>

<sup>5</sup><https://github.com/stelzch/diploid-cellular-automata>

## Literatur

- [1] Nazim Fatès. „Diploid Cellular Automata: First Experiments on the Random Mixtures of Two Elementary Rules“. In: *Cellular Automata and Discrete Complex Systems*. Springer International Publishing, 2017, S. 97–108. DOI: 10.1007/978-3-319-58631-1\_8. URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-58631-1\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-319-58631-1_8).
- [2] Stephen Wolfram. „Computation theory of cellular automata“. In: *Communications in Mathematical Physics* 96.1 (1. März 1984), S. 15–57. ISSN: 1432-0916. DOI: 10.1007/BF01217347. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01217347>.